# Analyse mathématique des modèles cinétiques en présence d'un champ magnétique intense


A. Finot, M. Bostan, M. Hauray

Université d'Aix-Marseille

I2M Marseille


Colloque de prospective de FR-FCM, IMERA

24-25 novembre 2016

## Equations de Vlasov-Poisson

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}(E + v \wedge \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$E = -\nabla_x \phi, \quad -\varepsilon_0 \Delta_x \phi = \rho = q \int_{\mathbb{R}^3} f \,\mathrm{d}v$$

$$\phi(t, x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t, y)}{|x - y|} \,\mathrm{d}y = \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t, y, w)}{4\pi|x - y|} \,\mathrm{d}w\mathrm{d}y$$

$$\mathbf{B}(x) = B(x)\, e(x), \quad B > 0, \quad |e| = 1$$

## Conservations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} m\frac{|v|^2}{2}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x + \frac{q^2}{2\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{ff}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}w\mathrm{d}y\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right] = 0$$

## Formulation hamiltonienne

$$E = -\nabla_x\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla_x \wedge A$$

$$\theta = \mathrm{d}[(qA_1 + mv_1)\mathrm{d}x_1 + (qA_2 + mv_2)\mathrm{d}x_2 + (qA_3 + mv_3)\mathrm{d}x_3]$$

$$H = m\frac{|v|^2}{2} + q\phi.$$

$$\nabla_{x,v}H = -\Theta^{\,t}\left(v, \frac{q}{m}(E + v\wedge\mathbf{B})\right)$$

$$\partial_t f - \Theta^{-1} \nabla_{x,v} H[f(t)] \cdot \nabla_{x,v} f = 0$$

$$H[f(t)](x,v) = m\frac{|v|^2}{2} + \frac{q^2}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t,y,w)}{4\pi|x-y|} \,\mathrm{d}w\mathrm{d}y$$

## Régime du rayon de Larmor fini

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_{x,v} f + b \cdot \nabla_{x,v} f = 0$$

$$a(t,x,v) \cdot \nabla_{x,v} = v_3 \partial_{x_3} + \frac{q}{m} E(t,x) \cdot \nabla_v$$

$$b(x,v) \cdot \nabla_{x,v} = v_1 \partial_{x_1} + v_2 \partial_{x_2} + \omega(v_2 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_2}), \;\; \omega = \frac{qB}{m}.$$

## Décomposition

$$H = H_a + H_b, \quad H_a = m\frac{(v \cdot e(x))^2}{2} + q\phi, \quad H_b = m\frac{|v \wedge e(x)|^2}{2}.$$

$$-\Theta\, {}^t\left(v, \frac{q}{m}(E + v \wedge \mathbf{B})\right) = \nabla_{x,v} H = \nabla_{x,v}(H_a + H_b) = -\Theta(a+b).$$

$$a(t,x,v)\cdot\nabla_{x,v} = (v\cdot e(x))e(x)\cdot\nabla_x + \left[\frac{q}{m}E(t,x) - (v \cdot e(x))\ {}^t\partial_x e\ v\right]\cdot\nabla_v$$

$$b(x,v)\cdot\nabla_{x,v} = [v-(v\cdot e(x))e(x)]\cdot\nabla_x + \left[\omega v \wedge e + (v \cdot e(x))\ {}^t\partial_x e\ v\right]\cdot\nabla_v$$

## Filtration des oscillations rapides

$$F^{\varepsilon}(t, X, V) = f^{\varepsilon}(t, x, v), \;\; (x, v) = (\mathcal{X}, \mathcal{V})(t; X, V)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{Z}}{\mathrm{d}t} = b(\mathcal{Z}(t; Z)), \;\; \mathcal{Z}(t; \cdot, \cdot) = (\mathcal{X}(t; \cdot, \cdot), \mathcal{V}(t; \cdot, \cdot))$$

$$F^{\varepsilon} \to F \;\; \varepsilon \searrow 0$$

Quel est le modèle limite pour $F$ ?

## Modèle limite

$$\partial_t F + (\, F(t), \mathcal{H}[F(t)]\,) = 0, \quad (t, X, V) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{H}[F](X, V) = m\frac{\left\langle (v \cdot e)^2 \right\rangle}{2} + \frac{q^2}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(X, V, Y, W) F(Y, W)\, \mathrm{d}W \mathrm{d}Y$$

$$m(\, F, \mathcal{H}[F]\,) = \nabla_V \mathcal{H}[F] \cdot \nabla_X F - \nabla_X \mathcal{H}[F] \cdot \nabla_V F + (\nabla_V F \wedge \nabla_V \mathcal{H}[F]) \cdot \frac{q\mathrm{B}}{m}.$$

$$\mathcal{E}(X, V, Y, W) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{4\pi |\mathcal{X}(t; X, V) - \mathcal{X}(t; Y, W)|}$$

## Propriétés de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}(X, V, Y, W) = \mathcal{E}(Y, W, X, V), \ \ (X, V, Y, W) \in \mathbb{R}^{12}$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}(h; X, V), \mathcal{Z}(h; Y, W)) = \mathcal{E}(X, V, Y, W)$$

$$(\nabla_Z \mathcal{E})(X, V, Y, W) \cdot b(X, V) + (\nabla_Z \mathcal{E})(Y, W, X, V) \cdot b(Y, W) = 0$$

où $\nabla_Z$ désigne le gradient par rapport aux deux premiers arguments $(X, V)$ de $\mathcal{E}$.

## Conservations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} F(t,X,V)\,\mathrm{d}V\mathrm{d}X = 0,\quad t\in\mathbb{R}_+$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} m\frac{|V\wedge e(X)|^2}{2}F(t,X,V)\,\mathrm{d}V\mathrm{d}X = 0,\quad t\in\mathbb{R}_+$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} F\left\{m\frac{\langle(v\cdot e)^2\rangle}{2} + \frac{q^2}{2\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{E}F(t,Y,W)\,\mathrm{d}W\mathrm{d}Y\right\}\mathrm{d}V\mathrm{d}X = 0.$$

## Invariance de la structure symplectique

Soit $\sigma$ une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^m$, qui est non-dégénérée et fermée. Alors la 2-forme différentielle $\sigma$ est laissée invariante par tout flot hamiltonien.

$$^t\partial\mathcal{Z}(t;\cdot)\Sigma(\mathcal{Z}(t;\cdot))\partial\mathcal{Z}(t;\cdot) = \Sigma, \quad t \in \mathbb{R}$$

## Moyenne d'un champ hamiltonien

Soient $b$ et $c$ deux champs de vecteurs hamiltoniens sur la variété symplectique $(\mathbb{R}^m, \sigma)$, correspondant respectivement aux Hamiltoniens $H_b, H_c$. Alors le champ de vecteurs moyenné

$$\langle c\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \partial\mathcal{Z}(-t;\mathcal{Z}(t;\cdot))c(\mathcal{Z}(t;\cdot))\,\mathrm{d}t$$

est hamiltonien, et correspond à l'Hamiltonien moyenné

$$\langle H_c\rangle := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T H_c(\mathcal{Z}(t;\cdot))\,\mathrm{d}t.$$

Merci pour votre attention.